פרק ג': הסמנטיקה של תחשיב הפסוקים – שינויים והערות

הגדרת פונקצית האמת ב-3.4 נותנת גם אלגוריתם רקורסיבי לחישוב ערך האמת של פסוק ϕ במבנה $\mathcal{A}$. ככלל, הגדרה רקורסיבית נותנת גם אלגוריתם אם הצעד הבודד שלה ניתן לביצוע ע"י אלגוריתם. נראה מהו הצעד הבודד במקרה זה. בחישוב $\mathcal{A}(\phi)$ תחילה יש לזהות איזה מין פסוק הוא ϕ ולמצוא את רכיביו. את זה עושה אלגוריתם הקריאה ב-2.18. אם ϕ הוא פסוק יסודי אז $\mathcal{A}(\phi)$ מחושב ישירות, כי ההנחה היא ש-$\mathcal{A}$ היא פונקציה נתונה על הפסוקים היסודיים. אם ϕ הוא $\neg\psi$ אז ψ מזוהה ע"י אלגוריתם הקריאה, אלגוריתם חישוב ערך האמת מופעל על ψ ונותן תוצאה שהיא T או F, ולוח האמת $t_\neg$ מופעל על תוצאה זאת ונותן את $\mathcal{A}(\phi)$. אם ϕ הוא $\chi\Box\psi$ אז $\Box$, ψ ו-χ מזוהים ע"י אלגוריתם הקריאה, אלגוריתם חישוב ערך האמת מופעל פעם על ψ ופעם על χ ונותן תוצאות שכל אחת מהן היא T או F, ולוח האמת $t_\Box$ מופעל עליהן ונותן את $\mathcal{A}(\phi)$. מוכח באינדוקציה על יצירת ϕ שהחישוב מסתיים במספר סופי של צעדים.

3.4א' הקשר $\leftrightarrow$. במהדורה השניה בחרנו שלא להכניס את הקשר $\leftrightarrow$ כאחד הקשרים הפסוקיים היסודיים ולכן לא הכנסנו לשפה סימן עבורו. עם זאת אנו מכניסים את נכתוב הקשר $\leftrightarrow$ כפעולה על הפסוקים המוגדרת ע"י $\phi\leftrightarrow\psi=\phi\wedge\psi\vee\neg\phi\wedge\neg\psi$. חישוב ישיר של ערך האמת של הפסוק $\phi\wedge\psi\vee\neg\phi\wedge\neg\psi$ לפי הגדרת האמת 3.4 מראה ש- $\mathcal{A}(\phi\leftrightarrow\psi)=T$ כאשר $\mathcal{A}(\phi)=\mathcal{A}(\psi)$ ו- $\mathcal{A}(\phi\leftrightarrow\psi)=F$ כאשר $\mathcal{A}(\phi)\neq\mathcal{A}(\psi)$, כלומר $\mathcal{A}(\phi\leftrightarrow\psi)=t_\leftrightarrow(\mathcal{A}(\phi),\mathcal{A}(\psi))$, היכן ש-$t_\leftrightarrow$ היא לוח האמת המוגדר בטבלה 7 ב-3.3. לכן מכאן ואילך נשתמש באופן חופשי ב-$\leftrightarrow$ כמו בקשרים היסודיים, ונשתמש עבורו בלוח האמת $t_\leftrightarrow$ בחישוב ערכי האמת של הפסוקים.

3.5 בשורה 8 של סעיף זה הסימן השמאלי $t_\neg$ הוא שגיאת דפוס ויש להחליפו ב- $t_\rightarrow$.

לסעיף 3.9 בספר דרוש המושג של הסימן הראשי בפסוק. מושג זה נדון כאן בקצרה.

3.8א' הסימן הראשי בפסוק, וליתר דיוק, ההופעה הראשית של סימן בפסוק.
א. בפסוק יסודי P הסימן הראשי הוא ההופעה הבודדת של הסימן P בפסוק.
ב. בפסוק $\neg\phi$ ההופעה של סימן הקשר $\neg$ בראש הפסוק היא הסימן הראשי בפסוק.
ג. בפסוק $(\phi\,\Box\,\psi)$ ההופעה של $\Box$ בין הקטעים ϕ ו-ψ, שהיא יחידה לפי הוכחת משפט הקריאה היחידה, היא הסימן הראשי בפסוק.

3.30 תרגיל. ג. מיהם הפסוקים ψ שהם כאלו כך שלכל פסוק ϕ קיים $\phi\equiv\phi\vee\psi$?
ד. מיהם הפסוקים ψ שהם כאלו כך שלכל פסוק ϕ קיים $\phi\equiv\phi\wedge\psi$?

3.64א' הצבה. פעולת ההצבה בתחשיב הפסוקים מוגדרת בספר ב-2.36. אנו נגדיר את ההצבה כאן בדרך אחרת, אולם לכל הצרכים שלנו תתקבל אותה הפעולה.

נסביר למה הכוונה במושג ההצבה, לאו דווקא בתחשיב הפסוקים, ונתחיל בדוגמאות. נצא מן הביטוי x^2-y ונציב בו את $y+2z$ עבור x. מה שאנו עושים זה שבמקום x אנו כותבים $y+2z$, וכדי שביטוי זה יועלה בריבוע כמו x עלינו לשים סביבו סוגריים, ומתקבל הביטוי $(y+2z)^2-y$. נדגים זאת בתחשיב הפסוקים, ונציב בפסוק $\neg P\to Q$ את $R\vee P$ עבור P. הפסוק המתקבל הוא $\neg(R\vee P)\to Q$.

נעסוק לא רק בהצבה עבור סימן אחד, אלא גם בהצבה עבור מספר סימנים. נצא מן הביטוי x^2-y+z והפעם נציב בו את $y+2z$ עבור x וגם את $z-x$ עבור y. הביטוי המתקבל הוא $(y+2z)^2-(z-x)+z$. מדובר כאן ב**הצבה סימולטנית** כלומר הצבה בבת אחת. אנו מציבים ב- x^2-y+z בבת אחת את $y+2z$ עבור x ואת $z-x$ עבור y ומקבלים את $(y+2z)^2-(z-x)+z$. אם נבצע את ההצבות הללו לא בבת אחת אלא בזו אחר זו אז ההצבה הראשונה, של $y+2z$ עבור x נותנת $(y+2z)^2-y+z$ וההצבה השניה, של $z-x$ עבור y, בביטוי זה נותנת $((z-x)+2z)^2-(z-x)+z$, וזהו ביטוי שונה ממה שקבלנו בהצבה בבת אחת. כאשר נדבר על הצבה של מספר ביטויים נתכוון תמיד להצבה הסימולטנית. דוגמה מתחשיב הפסוקים היא הבאה. נציב בפסוק $\neg P\to Q\vee S$ את $R\vee P$ עבור P ואת $P\leftrightarrow Q$ עבור Q. הפסוק המתקבל הוא $\neg(R\vee P)\to(P\leftrightarrow Q)\vee S$.

השימוש שאנו עושים כאן במונח הצבה הוא שונה מן המשמעות של מונח זה בבית הספר התיכון, ואולי גם באוניברסיטה. שם מקובל לומר שכדי לחשב את השיפוע של הגרף של הפונקציה $f(x) = (x+\sin x)^2$ בנקודה $x = \pi$ עינו להציב π עבור x בנוסת הנגזרת של f שהיא $2(x + \sin x)\cos x$. בהקשר הזה אנו מתכוונים לכך שעלינו לחשב את הביטוי $2(x + \sin x)\cos x$ כאשר אנו נותנים ל-x את הערך π. ההצבה בה נעסוק כאן היא אינה חישוב של ביטוי עבור ערכים מסויימים של המשתנים אלא פעולה של שינוי ביטוי ע"י החלפה של משתנים בו בביטויים אחרים. בדוגמה הראשונה שהבאנו הביטוי $x^2 - y$ שונה והתקבל הביטוי $(y+2z)^2 - y$. גם בכל אחת מיתר הדוגמאות יצאנו מביטוי אחד והגענו לביטוי שונה. המונח האנגלי להצבה בה אנו נשתמש הוא substitution והוא מתאים יותר מן המונח העברי כי משמעותו באנגלית היא "לבוא במקום".

בחרנו, במהדורה השניה, לא לעסוק הרבה בשאלה איך בדיוק נראים הפסוקים, כי זה שונה משיטת כתיבה אחת לשניה והתרכזנו בבנייה של פסוקים מפסוקים פשוטים יותר. לכן נגדיר גם את ההצבה לא ע"י שנציין את הכתיבה המדוייקת של הפסוק המתקבל אלא שנציין איך הפסוק המוצב מחליף את הפסוק היסודי עבורו הוא מוצב בתהליך הבנייה של הפסוק. לכן נגדיר את ההצבה כדלקמן.

הגדרה. יהיו $P_1,\ldots,P_n$ n פסוקים יסודיים שונים ויהיו $\psi_1,\ldots,\psi_n$ פסוקים. נסמן ב-$\vec{P}$ את ה-n-יה $P_1,\ldots,P_n$. וב-$\vec{\psi}$ את ה-n-יה $\psi_1,\ldots,\psi_n$. ההצבה הסימולטנית $\mathrm{sub}(\phi;\vec{P},\vec{\psi})$ של הפסוקים $\psi_1,\ldots,\psi_n$ עבור הפסוקים היסודיים $P_1,\ldots,P_n$ בפסוק ϕ מוגדרת ברקורסיה על ϕ כדלקמן.

לכל פסוק יסודי P
$$\mathrm{sub}(P;\vec{P},\vec{\psi}) = \begin{cases} \psi_i & \text{אם } P = P_i \\ P & \text{אם } P \notin \{P_1,\ldots,P_n\} \end{cases},$$
$$\mathrm{sub}(\neg\phi;\vec{P},\vec{\psi}) = \neg\mathrm{sub}(\phi;\vec{P},\vec{\psi})$$
ולכל קשר פסוקי יסודי $\square$
$$\mathrm{sub}(\phi_1\square\phi_2;\vec{P},\vec{\psi}) = \mathrm{sub}(\phi_1;\vec{P},\vec{\psi})\square\mathrm{sub}(\phi_2;\vec{P},\vec{\psi})$$

משפט. אם ϕ פסוק, $P_1,\ldots,P_n$ n פסוקים יסודיים שונים ו- $\psi_1,\ldots,\psi_n$ פסוקים אז גם $\mathrm{sub}(\phi;\vec{P},\vec{\psi})$ פסוק.

הוכחה. הטענה מוכחת באינדוקציה על ϕ (תוך שימוש ב-2.6 במהדורה השניה).

נדגיש כי הגדרת ההצבה בפסוקים של תחשיב הפסוקים היא הגדרה תחבירית טהורה, ולא נעשה בה כל שימוש במשמעות של הפסוקים. הדיון במשמעות הסימנטית של ההצבה נעשה בספר.